www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1990 — MATHEMATIQUES — DEUXIEME EPREUVE

OPTION P' — (Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS

- p désignera un entier naturel strictement positif. $p \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre p à termes réels ; ${}^tM$ est la matrice transposée de M ; I_p la matrice unité d'ordre p .

- $O(p)$ est le groupe des matrices orthogonales d'ordre p :

$$O(p) = \left\{P \mid P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tPP = I_p\right\} .$$

- $S(p)$ est l'espace des matrices symétriques d'ordre p :

$$S(p) = \left\{M \mid M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tM = M\right\} .$$

- $\mathcal{F}_p$ est l'ensemble des matrices suivant :

$$\mathcal{F}_p = \left\{A \mid A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \ , \ {}^tA + A = 0 \ , \ A^2 = -I_p\right\} .$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; J_n désignera la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par sa décomposition par blocs :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} .$$

- L'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ est un espace préhilbertien grâce au produit scalaire ${}^t\overline{Y}X$ où X et Y désignent des vecteurs de $\mathbb{C}^p$ considérés comme des matrices colonnes.

  $\overline{Y}$ désigne le vecteur dont les coordonnées sont les nombres complexes conjugués des coordonnées du vecteur Y .

- L'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2p .

PARTIE I

Dans cette partie, on se propose de montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{F}_{2n}$, il existe une matrice P de $O(2n)$ telle que ${}^tPAP = J_n$.

I.1.a. Démontrer que pour que l'ensemble $\mathcal{F}_p$ ne soit pas vide, il est nécessaire que l'entier p soit pair.

b. Vérifier que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ la matrice J_n appartient à $\mathcal{F}_{2n}$.

c. Démontrer que pour toute matrice A de $\mathcal{F}_{2n}$ et toute matrice P de $O(2n)$ la matrice ${}^tPAP$ appartient à $\mathcal{F}_{2n}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_{2n}$; désignons encore par A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ défini par $X \mapsto AX$ où X est un vecteur de $\mathbb{C}^{2n}$ (considéré comme une matrice colonne).

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

I.2.a. Démontrer que l'endomorphisme A n'admet que deux valeurs propres ; les déterminer.

b. Soient E_+ et E_- les sous-espaces propres associés ; démontrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^{2n}$, les vecteurs $AX + iX$ et $AX - iX$ sont des éléments propres de A.

En déduire que l'espace $\mathbb{C}^{2n}$ est égal à la somme directe de E_+ et de E_- .

c. Soit u l'application $X \mapsto \overline{X}$ de $\mathbb{C}^{2n}$ dans lui-même ; vérifier que u est $\mathbb{R}$-linéaire.

Que dire de $u(E_+)$ et de $u(E_-)$? En déduire les dimensions de E_+ et de E_- en tant que $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

d. Etablir que pour deux vecteurs X et Y de $\mathbb{C}^{2n}$ appartenant tous les deux à E_+ ou à E_- , il vient : ${}^tYX = 0$.

I.3. Etablir l'existence d'une famille de vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{C}^{2n}$ qui ait les propriétés :

α . La suite $(X_1, \ldots, X_n, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n)$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$ constituée de vecteurs propres de A .

β . pour tous entiers j, k = 1, 2, ..., n ,

$${}^t\overline{X}_j X_k = \delta_{jk} \ , \quad \delta_{jk} = 1 \text{ si } j = k \ , \ 0 \text{ si } j \neq k \ ; \quad {}^tX_j X_k = 0 \ .$$

I.4. En déduire qu'il existe une base $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que :

α . pour tout j = 1, 2, ..., n $\quad AY_j = Y_{j+n}$

$$AY_{j+n} = -Y_j$$

β . pour tous entiers j, k = 1, 2, ..., 2n $\quad {}^tY_j Y_k = \delta_{jk}$.

I.5. En déduire que pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{F}_{2n}$, il existe une matrice P de O(2n) telle que ${}^tPAP = J_n$.

PARTIE II

Caractérisation de fonctions intégrales premières d'un système différentiel

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{F}_{2n}$.

Soient $S^+(A)$ et $S^-(A)$ les sous-ensembles de S(2n) des matrices symétriques qui commutent ou anticommutent respectivement par rapport à A :

$$S^+(A) = \{M \mid M \in S(2n) \ , \ MA = AM\} \ ,$$

$$S^-(A) = \{M \mid M \in S(2n) \ , \ MA = -AM\} \ .$$

Etant données deux matrices M_1 et M_2 de S(2n) , $\{M_1, M_2\}_A$ désigne la matrice définie par :

$$(1) \qquad \{M_1, M_2\}_A = \frac{1}{2}(M_1AM_2 - M_2AM_1) \ .$$

II.1.a. Etablir que la relation (1) définit, dans S(2n), une loi de composition interne bilinéaire alternée.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b. Vérifier que pour tout triplet (M_1, M_2, M_3) de matrices de $S(2n)$, il vient :

$$\{M_1, \{M_2, M_3\}_A\}_A + \{M_2, \{M_3, M_1\}_A\}_A + \{M_3, \{M_1, M_2\}_A\}_A = 0 .$$

II.2.a. Soit P une matrice de $O(2n)$; démontrer que l'application $\varphi : M \mapsto {}^tPMP$ est un endomorphisme de $S(2n)$. Est-ce que φ est inversible ?

b. Etablir une relation entre les deux applications :

$$(M_1, M_2) \mapsto \{M_1, M_2\}_A \quad \text{et} \quad (M_1, M_2) \mapsto \{M_1, M_2\}_{J_n} .$$

II.3.a. Etablir que l'espace vectoriel $S(2n)$ est égal à la somme directe des sous-espaces vectoriels $S^+(A)$ et $S^-(A)$ (considérer pour une matrice M de $S(2n)$ la matrice AMA):

$$S(2n) = S^+(A) \oplus S^-(A) .$$

b. Soient M_1 et M_2 deux matrices de $S(2n)$.
Etablir que si M_1 et M_2 appartiennent à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$, $\{M_1, M_2\}_A$ appartient à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$. Envisager les différents cas possibles.

II.4. Soit M_0 une matrice donnée de $S(2n)$ $(M_0 \neq 0)$.

Soit $C(M_0)$ l'ensemble suivant : $C(M_0) = \left\{M \mid M \in S(2n) \mid \{M_0 , M\}_A = 0\right\}$.

a. Démontrer que $C(M_0)$ est un sous-espace vectoriel de $S(2n)$, de dimension au moins égale à 1. Démontrer que ce sous-espace vectoriel $C(M_0)$ est stable pour la loi de composition (1) .

b. La matrice M_0 est supposée appartenir à $S^+(A)$ ou à $S^-(A)$. Etablir que le sous-espace $C(M_0)$ est égal à la somme directe de deux sous-espaces vectoriels :

$$(2) \qquad C(M_0) = \left(C(M_0) \cap S^+(A)\right) \oplus \left(C(M_0) \cap S^-(A)\right) .$$

c. Exemple. Supposons $n = 1$; déterminer les espaces $S(2)$, $S^+(A)$ et $S^-(A)$.

La matrice A est prise égale à J_1 et la matrice M_0 à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $C(M_0)$. Est-ce que la propriété (2) établie en b. est encore vraie lorsque la matrice M_0 n'appartient ni à $S^+(A)$ ni à $S^-(A)$?

II.5. Soit le système linéaire à coefficients constants : (3) $\dfrac{dX}{dt}(t) = UX(t)$,

· $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$, X est continûment dérivable. U est une matrice d'ordre 2n égale au produit d'une matrice A de $\mathcal{J}_{2n}$ et d'une matrice M_0 de $S(2n)$.

Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^{2n}$ et à valeurs réelles ; la fonction f est dite intégrale première du système (3) si pour toute solution $t \mapsto X(t)$ de (3) la fonction composée $t \mapsto (f \circ X)(t)$ est constante.

Etablir que si $M \in S(2n)$, la forme quadratique $X \mapsto {}^tXMX$ est une intégrale première si et seulement si M appartient à $C(M_0)$.

T.S.V.P.

PARTIE III

Etude d'un exemple

Dans toute cette partie, la matrice A est supposée égale à J_n . Les matrices M de S(2n) seront écrites par blocs : $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ {}^t\beta & \delta \end{pmatrix}$ où α et δ appartiennent à S(n) et β à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.1. Donner l'expression générale des matrices qui appartiennent à $S^+(J_n)$ puis de celles à $S^-(J_n)$.

Quelles sont les dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels ?

III.2. Soit M_o une matrice appartenant à $S^-(J_n)$.

a. Soit M une matrice donnée appartenant à $S^+(J_n)$; démontrer que M appartient à $C(M_o)$ si et seulement si $M_oM + MM_o = 0$.

Donner pour une matrice appartenant à $S^-(J_n)$ la condition analogue.

b. La matrice M_o est définie par : $M_o = \begin{pmatrix} I_n & \mu_o \\ \mu_o & -I_n \end{pmatrix}$ où μ_o est une matrice de S(n) telle que $(\mu_o)^2 = k\, I_n$ (k est un réel positif). Déterminer les matrices qui appartiennent aux sous-espaces vectoriels $C(M_o) \cap S^+(J_n)$ et $C(M_o) \cap S^-(J_n)$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $C(M_o)$.

c. Dans cette question, n = 2 ; la matrice μ_o est la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $C(M_o)$.

III.3. Soit le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3}\, y + z$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{3}\, x + w$$
$$\frac{dz}{dt} = x + \sqrt{3}\, w$$
$$\frac{dw}{dt} = y + \sqrt{3}\, z$$

x, y, z, w sont quatre fonctions réelles continûment dérivables définies sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les intégrales premières de ce système qui sont des formes quadratiques.

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail